

2024年全国硕士研究生招生考试数学（二）真题

一、选择题

1、函数 $f(x) = \frac{1}{x|(1-x)(x-2)|}$ 的第一类间断点的个数是_____。

A . 3

B . 2

C . 1

D . 0

2、设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+t^3 \\ y=e^{t^2} \end{cases}$ 确定, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[f\left(2+\frac{2}{x}\right) - f(2) \right] =$ _____。

A . $2e$

B . $\frac{4e}{3}$

C . $\frac{2e}{3}$

D . $\frac{e}{3}$

3、设函数 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^3 dt$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则_____。

A . $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是奇函数

B . $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数

C . $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是偶函数

D . $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数

4、已知数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq 0$), 若 $\{a_n\}$ 发散, 则_____。

A . $\{a_n + \frac{1}{a_n}\}$ 发散

B . $\{a_n - \frac{1}{a_n}\}$ 发散

C . $\{e^{a_n} + \frac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散

D . $\{e^{a_n} - \frac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散

5、已知函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$, 则在点 $(0, 0)$ 处_____。

- A. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 可微
- B. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 不可微
- C. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 可微
- D. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 不可微

6、设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy =$ _____。

- A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$
- B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$
- C. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$
- D. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

7、设非负函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 给出以下三个命题:

- ①若 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。
- ②若存在 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。
- ③若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则存在 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在。

其中真命题个数为_____。

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

8、设 A 为 3 阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A =$ _____。

- A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

- B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

9、设A为4阶矩阵， A^* 为A的伴随矩阵，若 $A(A-A^*)=0$ ，且 $A \neq A^*$ ，则 rA 取值为_____。

- A. 0或1
- B. 1或3
- C. 2或3
- D. 1或2

10、设A, B为2阶矩阵，且 $AB=BA$ ，则“A有两个不相等的特征值”是“B可对角化”的_____。

- A. 充分必要条件
- B. 充分不必要条件
- C. 必要不充分条件
- D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

11、曲线 $y^2=x$ 在点(0, 0)处的曲率圆方程为_____。

12、函数 $f(x, y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极值点是_____。

13、微分方程 $y'=\frac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为_____。

14、已知函数 $f(x)=(e^x+1)x^2$ ，则 $f^{(5)}(1)=$ _____。

15、某物体以速度 $v(t)=t+k\sin\pi t$ 做直线运动，若它是从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度为 $\frac{5}{2}$ ，则 $k=$ _____。

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16、设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个向量均线性无关, 则 $ab =$ _____。

三、解答题

共70分。请将解答写在指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17、设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x, y = 3x$ 围成, 计算 $\iint_D (1+x-y) dx dy$ 。

设 $y(x)$ 为微分方程 $x^2 y'' + xy' - 9y = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = 6$ 的解。

18、利用变换 $x = et$ 将上述方程化为常系数线性方程, 并求 $y(x)$ 。

19、计算 $\int_1^2 y(x) \sqrt{4-x^2} dx$ 。

20、设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x}e^{-x}$ 与直线 $x = t, x = 2t$ 及 x 轴围成, D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的最大值。

已知函数 $f(u, v)$ 具有2阶连续偏导数, 且函数 $g(x, y) = f(2x+y, 3x-y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$$

21、求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ 。

22、若 $\frac{\partial f(u, 0)}{\partial u} = ue^{-u}$, $f(0, v) = \frac{1}{50}v^2 - 1$, 求 $f(u, v)$ 的表达式。

设函数 $f(x)$ 具有2阶导数, 且 $f'(2) = f'(4)$, $|f''(x)| \leq 1$, 证明:

23、当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$ 。

24、 $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

设矩阵 A, B , 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T B A x$ 。已知方程组 $Ax = 0$ 的解均是 $B^T x = 0$ 的解, 但这两个方程组不同解。

25、求 a, b 的值。

26、求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形。