

2025年全国硕士研究生招生考试数学（二）真题

一、选择题

(每小题5分，共50分)

1、设函数 $z=z(x, y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2} dt=0$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

A. $\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}-e^{-y^2})$

B. $\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}+e^{-y^2})$

C. $-\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}-e^{-y^2})$

D. $-\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}+e^{-y^2})$

2、已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2} \sin t dt$ ， $g(x)=\int_0^x e^{t^2} dt \cdot \sin^2 x$ ，则_____。

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0, 0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

3、如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 的任一解 $y(x)$ ，反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 均收敛，那么 a 的取值范围是_____。

A. $(-2, -1]$

B. $(-\infty, -1]$

C. $(-2, 0)$

D. $(-\infty, 0)$

4、设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内有定义且恒不为零。若当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x \rightarrow 0$ 时，_____。

A. $f(x)+g(x)=o(g(x))$

B. $f(x)g(x)=o(f^2(x))$

C. $f(x)=o(e^{g(x)}-1)$

D. $f(x) = o(g^2(x))$

5、设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_{-2}^2 dx \int_{4-x^2}^4 f(x, y) dy =$ _____。

A. $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy$

B. $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy$

C. $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_2^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx \right] dy$

D. $2 \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx$

6、设单位质点 P, Q 分别位于点 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 处, P 从点 $(0, 0)$ 出发沿 x 轴正向移动, 记 G 为引力常量, 则当质点 P 移动到点 $(1, 0)$ 时, 克服质点 Q 的引力所做的功为 _____。

A. $\int_0^1 \frac{G}{x^2+1} dx$

B. $\int_0^1 \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$

C. $\int_0^1 \frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$

D. $\int_0^1 \frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$

7、设函数 $f(x)$ 连续, 给出下列四个条件:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}$ 存在; ② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x}$ 存在;

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在; ④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}$ 存在。

其中能得到“ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件的个数是 _____。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

8、设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值, 则 _____。

A. $a > 4, b > 0$

B. $a < 4, b > 0$

C. $a > 4, b < 0$

D. $a < 4, b < 0$

9、下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的是_____。

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

10、设3阶矩阵A, B满足 $r(AB) = r(BA) + 1$, 则_____。

A. 方程组 $(A+B)x=0$ 只有零解

B. 方程组 $Ax=0$ 与方程组 $Bx=0$ 均只有零解

C. 方程组 $Ax=0$ 与方程组 $Bx=0$ 没有公共非零解

D. 方程组 $ABAx=0$ 与方程组 $BABx=0$ 有公共非零解

二、填空题

(每小题5分, 共30分)

11、设 $\int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln 2$, 则 $a =$ _____。

12、曲线 $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1}$ 的渐近线方程为_____。

13、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left[\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \cdots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n} \right] =$ _____。

14、已知函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln(1+2t) \\ 2t - \int_1^{y+t^2} e^{-u^2} du = 0 \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$ _____。

15、微分方程 $(2y-3x) dx + (2x-5y) dy = 0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为_____。

16、设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ，若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ ，则方程组 $AX = \alpha_1 + 4\alpha_4$ 的通解为 $x =$ _____。

三、解答题

(共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17、计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$ 。

18、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - e^{2\sin x} + 1}{\ln(1+x) + \ln(1-x)} = -3$ ，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$ 。

19、设函数 $f(x, y)$ 可微且满足 $df(x, y) = -2xe^{-y}dx + e^{-y}(x^2 - y - 1)dy$ ， $f(0, 0) = 2$ ，求 $f(x, y)$ ，并求 $f(x, y)$ 的极值。

20、已知平面有界区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4x, x^2 + y^2 \leq 4y\}$ ，计算 $\iint_D (x-y)^2 dx dy$ 。

21、设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导。证明：导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加的充分必要条件是：

对 (a, b) 内任意的 x_1, x_2, x_3 ，当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时， $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ 。

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同。

22、求 a 的值及 k 的取值范围；

23、若存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = B$ ，求 k 及 Q 。